國立臺灣大學
開放式課程

《經濟學原理》
第四講 微積分

授課教師：國立臺灣大學經濟學系 林明仁教授

【本著作除另有註明外，採取創用 CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣 3.0 版**授權釋出】**

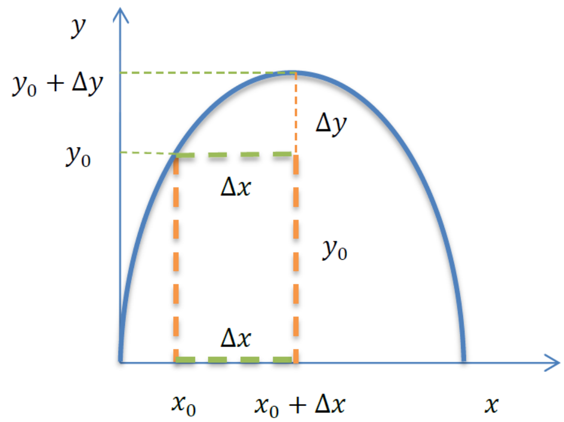
※本課程指定教材為 N. Gregory Mankiw: Principles of Economics (2012), 6th edition.

National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程

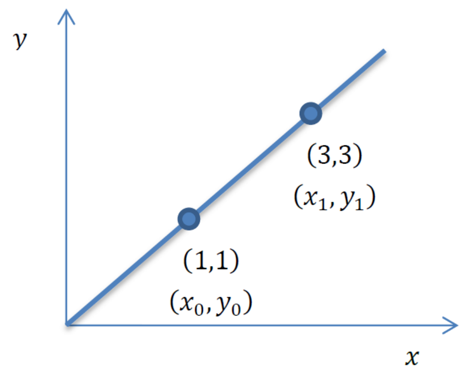
I. Slope and Limit

However, how can we measure the "rate of change" in a more "general environment", say $y = (x)$?

- How can we measure the rate of change given only (x_0, y_0) and $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$?



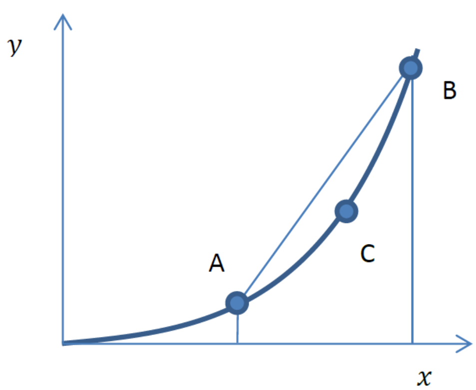
Rate of change and slope



$$\text{Slope} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

每改變一單位的x，y 的變化量。

- Slope, or "rate of change" depends not only on the amount of change, "Δx", but also the starting point x_0.



若直接計算$\overline{AB}$斜率，則：
高估$\overline{AC}$斜率，低估$\overline{BC}$斜率

- How can we measure the “rate of change”more precisely?

⇨ Let $x_0 + \Delta x$ be close to x_0
⇨ A.C.A.P. (As close as possible)

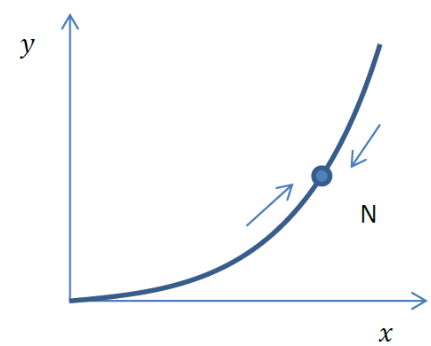
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

⇨ x 逼近 0，使 Δy 變得更精確
⇨ 母數推導出來的（給不同起始值 x_0，得不同導數值）

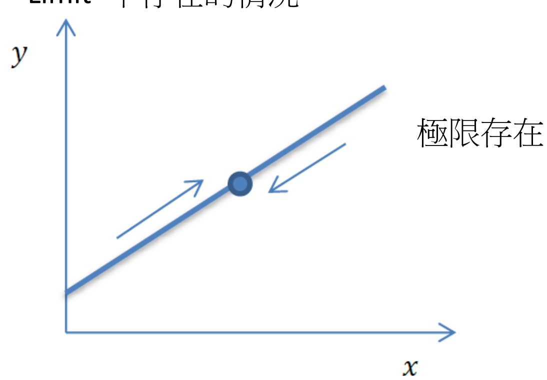
- $y = f(x)$ 導函數表示為$f'(x)$ 或者f'(Lagrange)，而 $\frac{dy}{dx}$ (Leibniz) 和 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 相比，前者強調 limit。

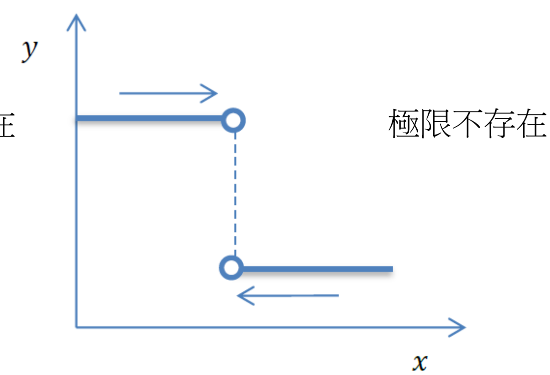
$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- 逼近的方法：若要趨近於N，則從N的兩邊一起逼近（左、右極限）



- Limit 不存在的情況





$\lim q_1 \pm q_2 = \lim q_1 \pm \lim q_2$

$\lim q_1 \times q_2 = \lim q_1 \times \lim q_2$

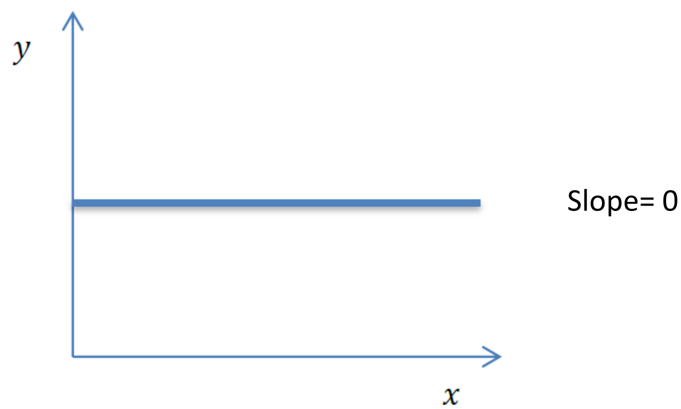
$\lim \frac{q_1}{q_2} = \frac{\lim q_1}{\lim q_2} \quad (\lim q_2 \neq 0)$

National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程

II. 單變數函數的微分

Given $y=(x)=k$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{k-k}{\Delta x}=0.$$



一般化：

$$\frac{dx^n}{dx}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^n-{x_0}^n}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{{x_0}^n+n{x_0}^{n-1}\Delta x+(n-1)x_0^{n-2}\Delta x^2+\cdots-{x_0}^n}{\Delta x}$$

$$=n{x_0}^{n-1}$$

Example 1:

$y=f(x)=\ x^{-3}, f'(\mathrm{x})=-3x^{-4}.$

Example 2:

$y=f(x)=\ x^{0.5}, f'(\mathrm{x})=0.5x^{-0.5}=\frac{\sqrt{x}}{2x}.$

Example 3:

$y=f(x)=\ x^2$,在 $x=1$時的切線斜率？

$f'(x)=2x$,再代入$x=1$, $f'(1)=2$.

National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程

III. Rules of Differentiation

1. $\frac{d}{dx}[f(x)\ +\ g(x)]=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$

Example 1:

$f(x)=14x^3, g(x)=\ 2x^2,$

$$\frac{df(14x^3+2x^2)}{dx}=42x^2+4x.$$

若有n項也相同：

$$\frac{d}{dx}[a_1(x)+a_2(x)+\cdots+a_n(x)]=\frac{da_1(x)}{dx}+\frac{da_2(x)}{dx}+\cdots+\frac{da_n(x)}{dx}.$$

2. $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot\ g(x)]=f(x)\frac{dg(x)}{dx}+g(x)\frac{df(x)}{dx}$

Example:

$(x)=2x+3,\ g(x)=3x^2, f^{'}(x)=\ 2,\ \ g^{'}(x)=\ 6x,$

$$\frac{d[f(x)\cdot\ g(x)]}{dx}=\frac{d(2x+3)3x^2}{dx}=18x^2+18x.$$

Proof:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot\ g(x)]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)g(x)+f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\big(g(x+\Delta x)-g(x)\big)+g(x)\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)(f(x+\Delta x)-f(x))}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}f(x\ +\ \Delta x)\ +\ g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x+\Delta x)-f(x))}{\Delta x}$$

$$=g'(x)\cdot f(x)+g(x)\cdot f'(x).$$

National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程

IV. Chain Rule

如果$z=f(y), y=g(x)$，那麼x變動一單位對z有何影響？

$$x \to y \to z$$

$$\frac{dy}{dx} \times \frac{dz}{dy}$$

Example 1:

$z = 3y^2, y = 2x+5,$

$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 6y \cdot 2 = 12y = 12(2x+5) = 24x+60.$

Example 2:

$R = f(Q),\ Q = g(L)$

where $R = revenue$, $Q = Quantity$, $L = Labor$

即多雇用一個工人，對收入的影響。

V. 多變數的微分

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

偏微分的計算

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \frac{\partial y}{\partial x_3} \ldots$$

⇨ 在$x_2, x_3, x_4 \ldots$ 不變的前提之下，x_1 變動對y的影響。

$$\text{i.e. } \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{f(\overline{x_1}+\Delta x, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots, \overline{x_n}) - f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \ldots, \overline{x_n})}{\partial x}$$

Example:

$y = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2,$

$\frac{\partial y}{\partial x_1}=6x_1 + x_2$(把$x_2$看成常數)$, \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1 + 8x_2$(把$x_1$看成常數).

National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程

VI. 極值

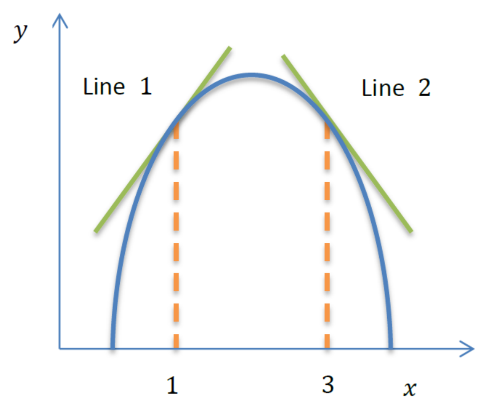
Why all the fuss?

⇨ To get minimum or maximum（效益極大化）

Example:

$$y = ax^2 + bx + \mathrm{c},$$

where $a > 0$ is a convex function; $a < 0$ is a concave function.



Line 1 切線斜率$= 2a(1) + b = 2a + b > 0 \uparrow$,

Line 2 切線斜率$= 2a(3) + b = 6a + b < 0 \downarrow$.

極值在？

$$f'(x) = 2ax + b = \mathbf{0},$$

$$x^* = \frac{-b}{2a}$$

要判斷極小值或極大值？

⇨ 對$f'(x)$ 再微分一次，以$f''(x)$ 來判斷。

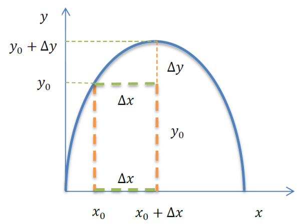
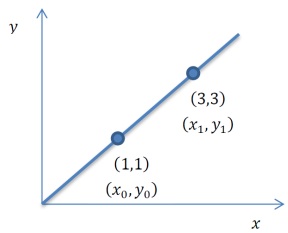
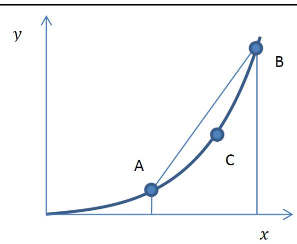
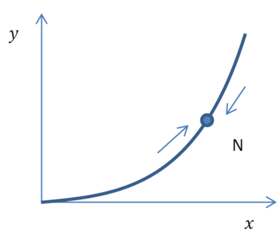
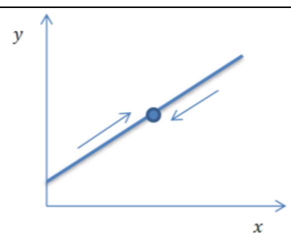
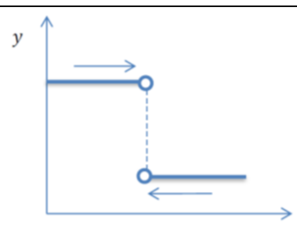
$f''(x) = 2a$

單變數下：

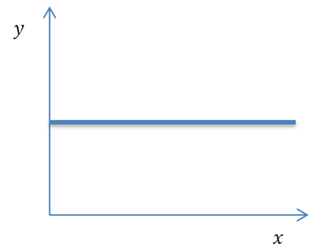
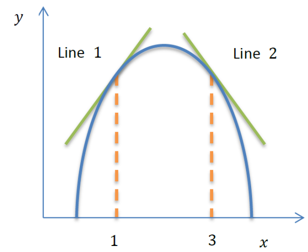
$f''(x) > 0$ 為極小值，$f''(x) < 0$ 為極大值。

National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程

版權聲明

頁數	作品	版權標示	作者/來源
2		BY NC SA	製圖：國立臺灣大學經濟學系 林明仁教授
2		BY NC SA	製圖：國立臺灣大學經濟學系 林明仁教授
2		BY NC SA	製圖：國立臺灣大學經濟學系 林明仁教授
3		BY NC SA	製圖：國立臺灣大學經濟學系 林明仁教授
3		BY NC SA	製圖：國立臺灣大學經濟學系 林明仁教授
3		BY NC SA	製圖：國立臺灣大學經濟學系 林明仁教授

National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程

4			製圖：國立臺灣大學經濟學系 林明仁教授
7			製圖：國立臺灣大學經濟學系 林明仁教授

National Taiwan University OpenCourseWare 臺大開放式課程