

工程數學--微分方程

Differential Equations (DE)

授課者：丁建均

教學網頁：<http://djj.ee.ntu.edu.tw/DE.htm>



【本著作除另有註明外，採取創用CC「姓名標示—非商業性—相同方式分享」台灣3.0版授權釋出】

Chapter 5 Modeling with Higher Order Differential Equations

Chapter 4 的應用題

自然界，有不少的系統可以用 linear DE 來表示
其中有不少的系統可以進一步簡化成 linear DE with constant coefficients



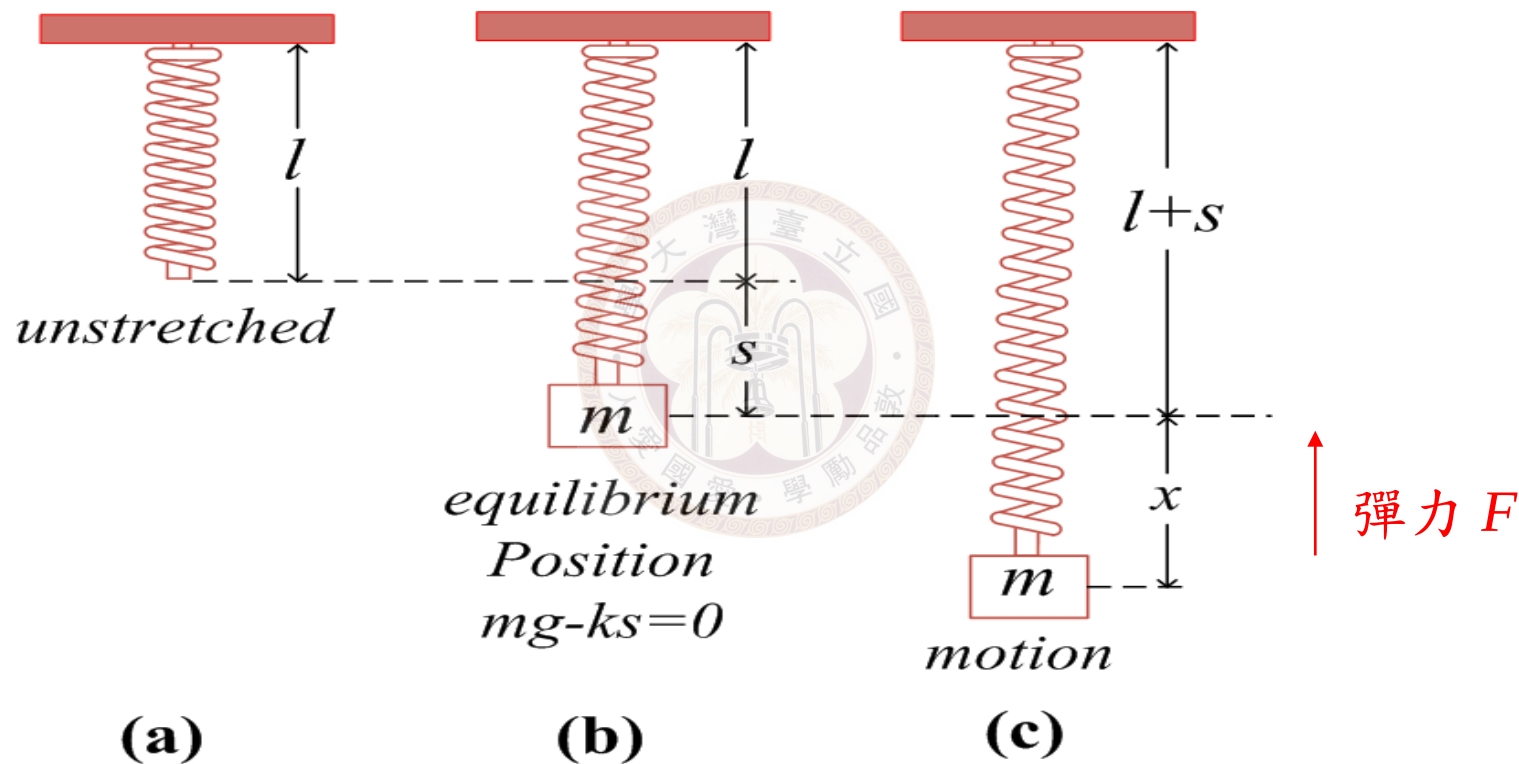
5-1 Linear Models: Initial Value Problem

位置： x , 速度： $\frac{d}{dt}x$ 加速度： $\frac{d^2}{dt^2}x$

$$F = ma \longrightarrow F = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F - \beta v = ma \longrightarrow F - \beta \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

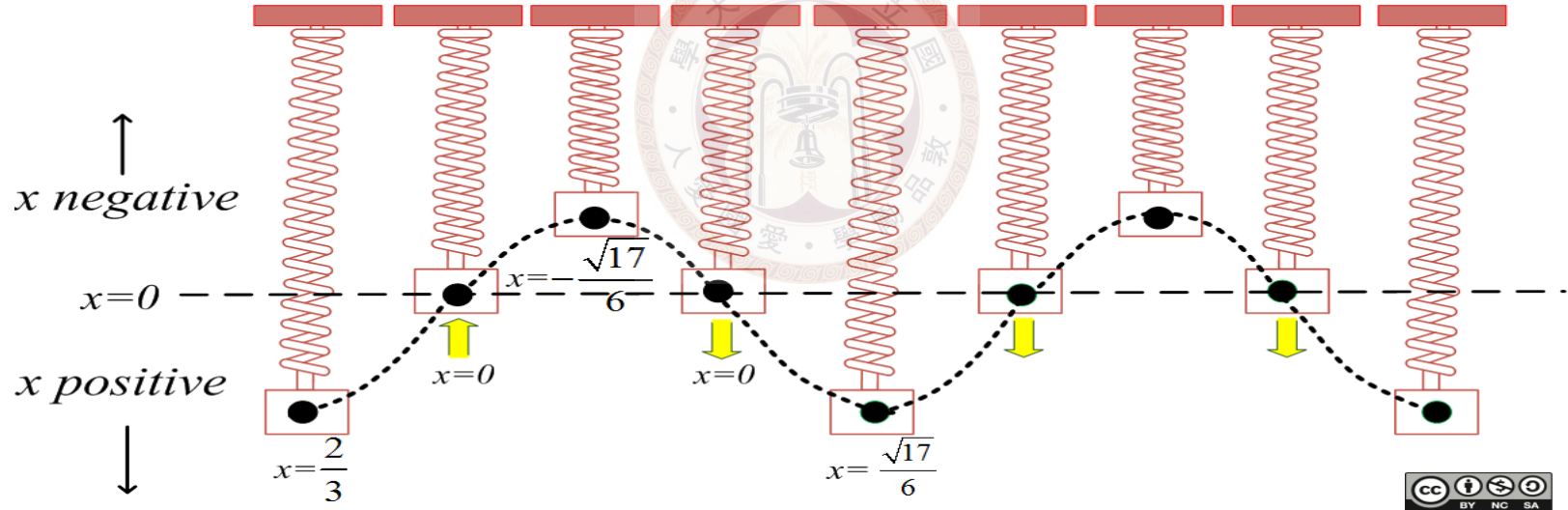
v : 速度, βv : 磨擦力

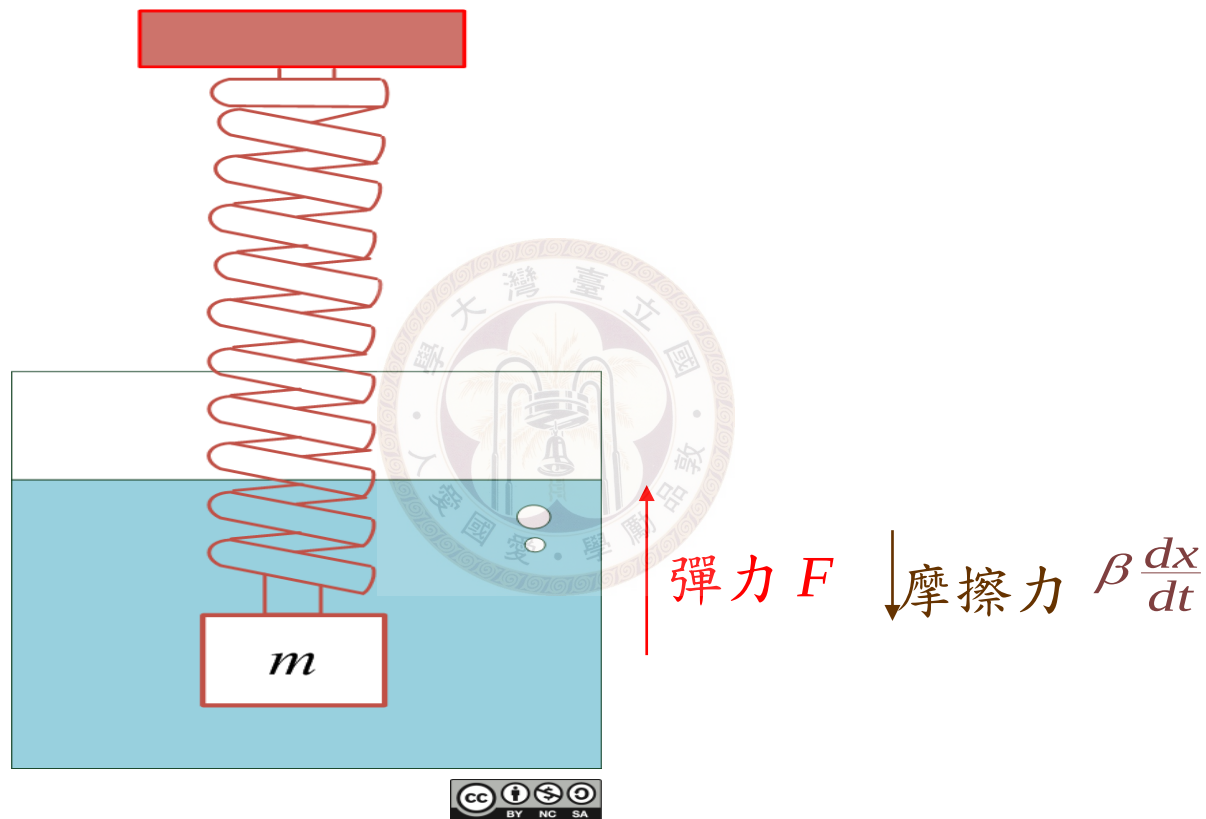


$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \longrightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$$

Solution: $x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$





$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} = F \longrightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

解有成三種情形 $\beta^2 - 4mk > 0$

$$\beta^2 - 4mk = 0$$

$$\beta^2 - 4mk < 0$$

需要注意的概念

(1) 名詞一

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = g(t)$$

$g(t)$ 被稱作 **input** 或 deriving function 或 forcing function

$y(t)$ 被稱作 **output** 或 **response**



(2) 名詞二

對一個 2nd order linear DE with constant coefficients

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

auxiliary function $a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = 0$

當 $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ 時，稱作 overdamped

當 $a_1^2 - 4a_2a_0 = 0$ 時，稱作 critical damped

當 $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ 時，稱作 underdamped

當 $-4a_2a_0 < 0, a_1 = 0$ 時，稱作 undamped

(3) $a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = g(x)$ 當中

a_1 的值將影藉衰減速度

當 a_2, a_1, a_0 的值皆為正， a_1/a_2 的值越大，衰減的進度越快

When $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$ $y_c = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

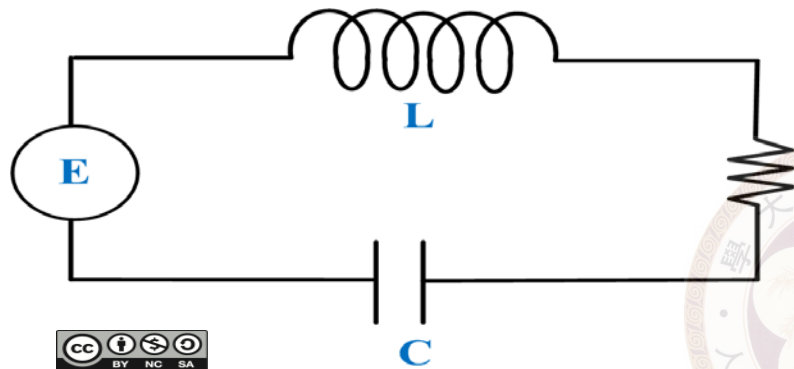
$$\alpha = -a_1 / 2a_2,$$

When $a_1^2 - 4a_2a_0 > 0$ $y_c = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

$$m_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

$$m_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

5-1-4 RLC circuit



inductance 的電壓 $L \frac{di}{dt}$

capacitor 的電壓 $\frac{q}{C}$

resistor 的電壓 Ri

$$\frac{q}{C} + Ri + L \frac{di}{dt} = E(t) \quad \text{using } i = \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} = E(t) \quad \text{一定可以解}$$

$$\frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 q}{dt^2} = E(t)$$

auxiliary function $Lm^2 + Rm + 1/C = 0$

roots: $m_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$ $m_2 = \frac{-R - \sqrt{R^2 - 4L/C}}{2L}$

Case 1: $R^2 - 4L/C > 0$ (overdamped)

($m_1 \neq m_2$, m_1, m_2 are real)

Complementary function:

$$q_c(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$$

註：由於 R, L, C 的值都是正的, $\sqrt{R^2 - 4L/C} < R$ 必定可以滿足

所以 m_1, m_2 都是負的

$$q_c(t) = 0 \quad \text{when } t \rightarrow \infty$$

Particular solution (1) $E(t)$ 有的時候可用” guess” 的方法來解

(2) $E(t)$ 用 variation of parameters 的方法一定解得出來(但較耗時)

$$W = \begin{vmatrix} e^{m_1 t} & e^{m_2 t} \\ m_1 e^{m_1 t} & m_2 e^{m_2 t} \end{vmatrix} = (m_2 - m_1) e^{(m_1 + m_2)t}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{m_2 t} \\ ? & m_2 e^{m_2 t} \end{vmatrix} = ?$$

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-e^{m_2 t} E(t) / L}{(m_2 - m_1) e^{(m_1 + m_2)t}}$$

$$u_1 = \frac{-\int E(t) e^{-m_1 t} dt}{L(m_2 - m_1)}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{m_1 t} & 0 \\ m_1 e^{m_1 t} & ? \end{vmatrix} = ?$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{e^{m_1 t} E(t) / L}{(m_2 - m_1) e^{(m_1 + m_2)t}}$$

$$u_2 = \frac{\int e^{-m_2 t} E(t) dt}{L(m_2 - m_1)}$$

$$q_p(t) = -\frac{e^{m_1 t} \int E(t) e^{-m_1 t} dt}{L(m_2 - m_1)} + \frac{e^{m_2 t} \int E(t) e^{-m_2 t} dt}{L(m_2 - m_1)}$$

$$q(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} - \frac{e^{m_1 t} \int E(t) e^{-m_1 t} dt}{L(m_2 - m_1)} + \frac{e^{m_2 t} \int E(t) e^{-m_2 t} dt}{L(m_2 - m_1)}$$

Specially, when $E(t) = E_0$ where E_0 is some constant

$$\begin{aligned} q_p(t) &= -\frac{E_0 e^{m_1 t} \int e^{-m_1 t} dt}{L(m_2 - m_1)} + \frac{E_0 e^{m_2 t} \int e^{-m_2 t} dt}{L(m_2 - m_1)} = \frac{E_0}{L(m_2 - m_1)} \left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right) \\ &= \frac{E_0}{L m_1 m_2} = E_0 C \quad (m_1 m_2 = 1/LC) \end{aligned}$$

$$q(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t} + E_0 C$$

Case 2: $R^2 - 4L/C = 0$ (critically damped)

$$(m_1 = m_2 = -R/2L)$$

$$q_c(t) = c_1 e^{-Rt/2L} + c_2 t e^{-Rt/2L}$$

$$q_c(t) = 0 \quad \text{when } t \rightarrow \infty$$

Particular solution

$$q_p(t) = \frac{e^{-Rt/2L}}{L} \left[t \int E(t) e^{Rt/2L} dt - \int E(t) t e^{Rt/2L} dt \right]$$

$$q(t) = c_1 e^{-Rt/2L} + c_2 t e^{-Rt/2L} + \frac{e^{-Rt/2L}}{L} \left[t \int E(t) e^{Rt/2L} dt - \int E(t) t e^{Rt/2L} dt \right]$$

When $E(t) = E_0$, $q_p(t) = E_0 C$

Case 3: $R^2 - 4L/C < 0$ (underdamped)

$$m_1 = \alpha + j\beta \quad m_2 = \alpha - j\beta$$

$$\alpha = \frac{-R}{2L}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4L/C - R^2}}{2L}$$

$$q_c(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \quad q_c(t) = 0 \quad \text{when } t \rightarrow \infty$$

Particular solution

$$q_p(t) = \frac{e^{\alpha t}}{L\beta} \left[\sin \beta t \int E(t) e^{-\alpha t} \cos \beta t dt - \cos \beta t \int E(t) e^{-\alpha t} \sin \beta t dt \right]$$

General solution

$$q(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) + \frac{e^{\alpha t}}{L\beta} \left[\sin \beta t \int E(t) e^{-\alpha t} \cos \beta t dt - \cos \beta t \int E(t) e^{-\alpha t} \sin \beta t dt \right]$$

When $E(t) = E_0$ where E_0 is some constant

$$q(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) + E_0 C$$

When $R = 0$, then $\alpha = 0$

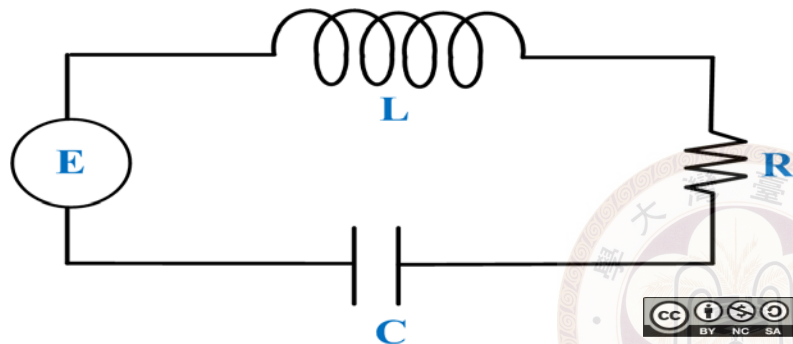
$$q(t) = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t + \frac{1}{L\beta} \left[\sin \beta t \int E(t) \cos \beta t dt - \cos \beta t \int E(t) \sin \beta t dt \right]$$

When $R = 0$, $E(t) = E_0$

$$q(t) = c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t + E_0 C$$

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) = d_1 \cos \beta t + d_2 \sin \beta t \quad d_1 = \beta c_2 \quad d_2 = -\beta c_1$$

以 DE 的觀點來解釋 RLC 電路的問題

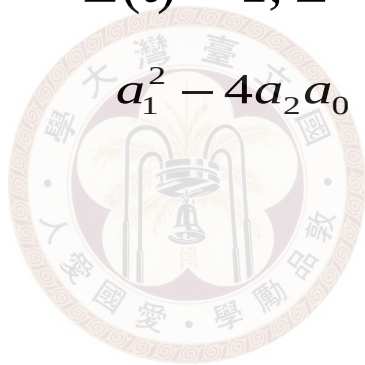


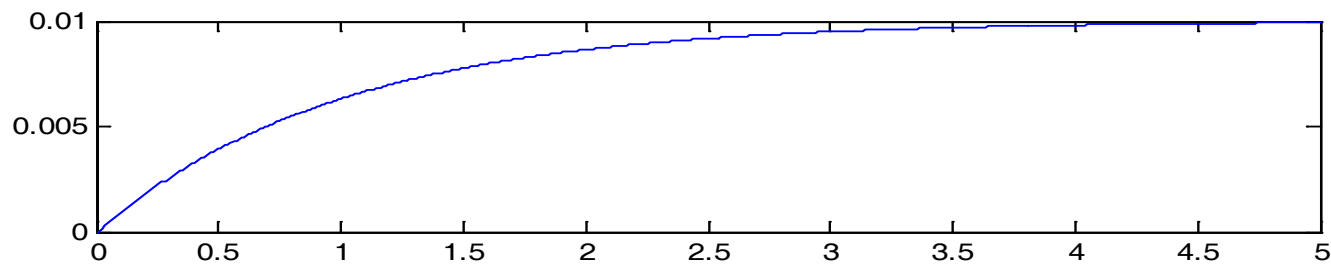
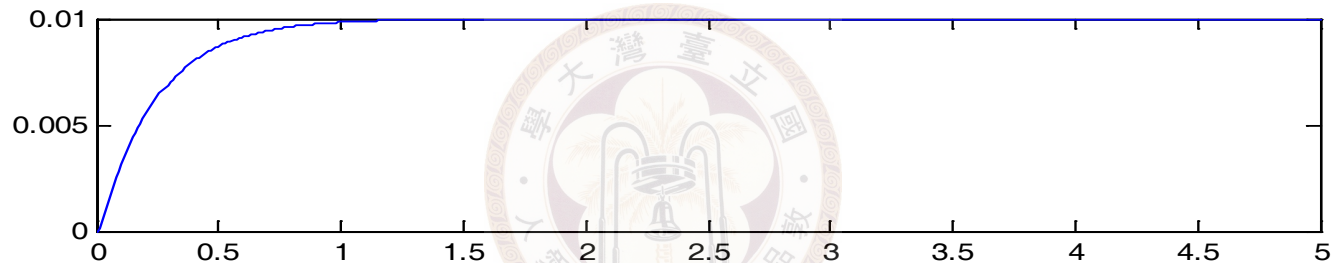
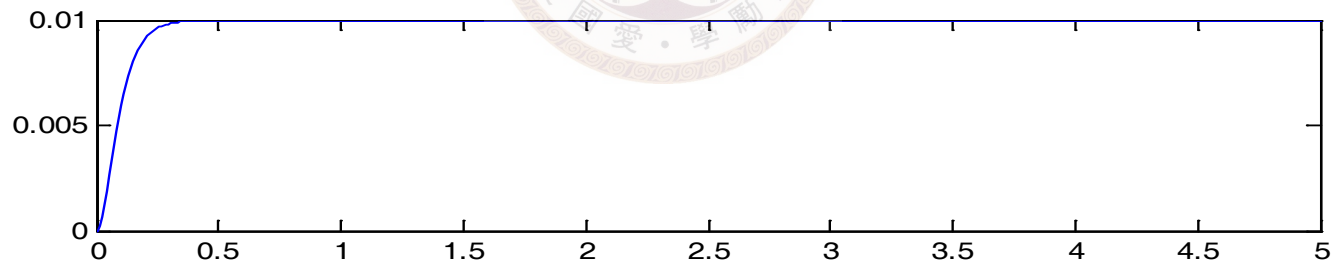
- (1) $R^2 < 4L/C$ $\longrightarrow$ 產生弦波
- (2) R 越小，弦波衰減得越慢

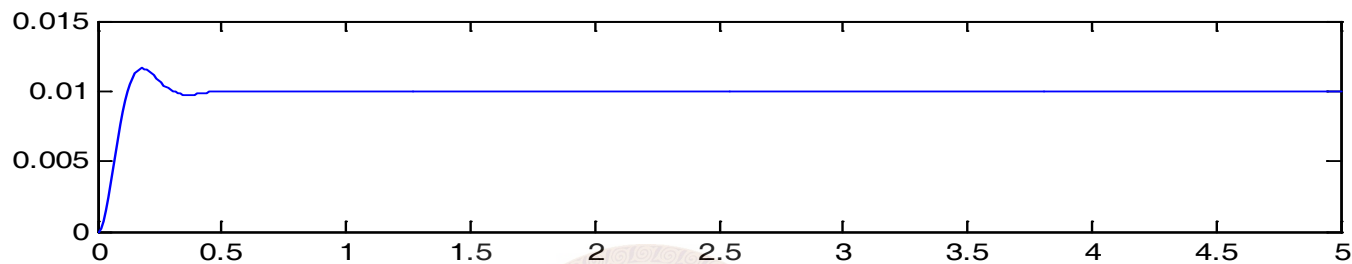
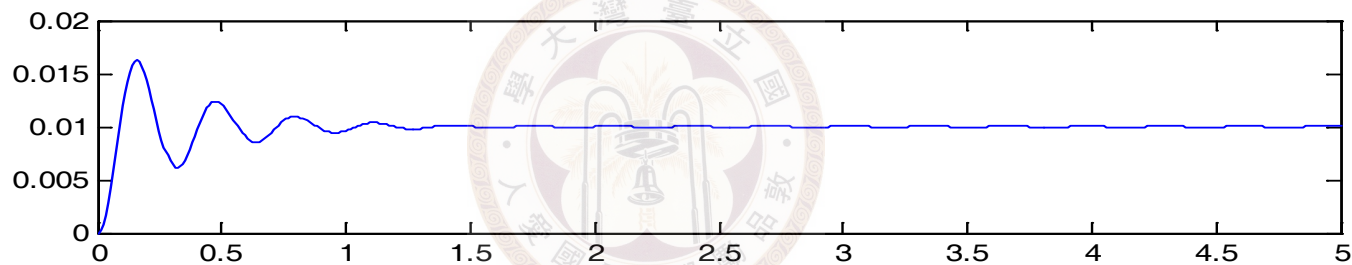
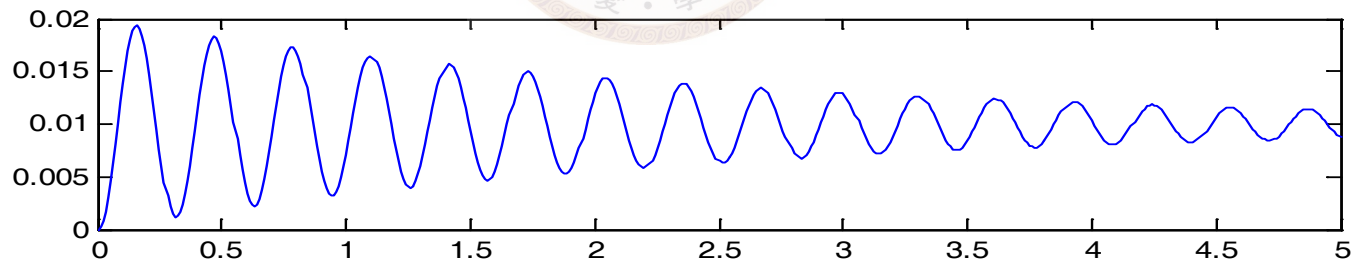
例子

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t) \quad E(t) = 1, L = 0.25, C = 0.01$$

$$a_1^2 - 4a_2a_0 = R^2 - 100$$



$R = 100$  $R = 25$  $R = 10$ 

$R = 5$  $R = 1.5$  $R = 0.2$ 

5-1-5 Express the Solutions by Other Forms

(1) Express the Solution by the Form of Amplitude and Phase

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

當 $a_1^2 - 4a_2 a_0 < 0$ 時，solution 為 $y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$

$$\alpha = -a_1 / 2a_2, \quad \beta = \sqrt{4a_2 a_0 - a_1^2} / 2a_2$$

Solution 可改寫成

$$y = Ae^{\alpha x} \sin(\beta x + \phi) \quad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

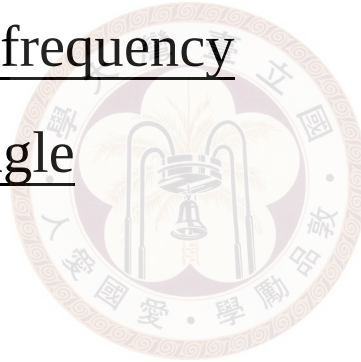
$$\phi = \sin^{-1}(c_1 / A) = \cos^{-1}(c_2 / A)$$

$$y = Ae^{\alpha x} \sin(\beta x + \phi)$$

$Ae^{\alpha x}$: damped amplitude

$\frac{\beta}{2\pi}$: damped frequency

ϕ : phase angle



(2) Express the Solution by Hyperbolic Functions

$$a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

$$\text{當 } a_1 = 0$$

$$\text{且 } a_2 > 0, a_0 < 0 \quad (\text{或 } a_0 > 0, a_2 < 0)$$

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{-m_1 x} \quad m_1 = \sqrt{-\frac{a_0}{a_2}}$$

$$y = c_3 \cosh(m_1 x) + c_4 \sinh(m_1 x)$$

$$\cosh(m_1 x) = \frac{e^{m_1 x} + e^{-m_1 x}}{2} \quad c_3 = c_1 + c_2$$

$$\sinh(m_1 x) = \frac{e^{m_1 x} - e^{-m_1 x}}{2} \quad c_4 = c_1 - c_2$$

5-1-6 本節要注意的地方

- (1) 將力學現象寫成 DE 時，要注意正負號 (根據力的方向)
- (2) 注意 page 266 的四個專有名詞
- (3) 注意 linear DE with constant coefficients 的解，有其他的寫法
(see pages 279 and 281)



5-2 Linear Models: Boundary-Value Problem

Section 5-2 的問題，和 Section 5-1 類似

(都是 Linear DE)

只是將 initial value problems 變成 boundary value problems

複習：將 IVP 改成 boundary value problems，
對 solution 有什麼影響？

Section 5-1 的例子

(1) 牛頓運動定律

(2) 彈簧運動 (subsection 5-1-1~5-1-3)

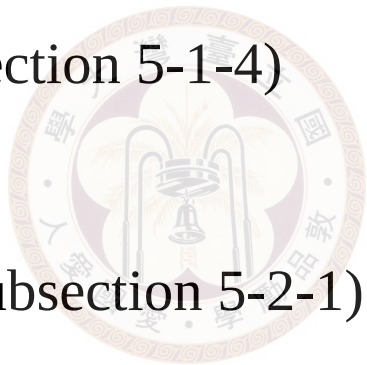
(3) RLC Circuit (subsection 5-1-4)

Section 5-2 的例子

(1) 樑彎曲 (a) 橫放 (subsection 5-2-1)

(b) 上方施力 (subsection 5-2-2)

(2) 跳繩 (subsection 5-2-3)



4-8 Solving Systems of Linear Equations by Elimination

4-8-1 方法適用的情形和限制

處理有 2 個以上 dependent variables 的問題

例如：Section 3-3 電路學上“並聯”的例子

限制：必需是 linear and constant coefficients

4-8-2 方法

(Step 1) 先將 $\frac{d^n}{dt^n}$ 寫成 D^n

(Step 2) 再用聯立方程(或線性代數)的方式

將各個 dependent variable 所對應的 DE 寫出

(Step 3) 再運用 Sections 4-3, 4-4 的方法，

得出各 dependent variables 的解

(Step 4) 代回原式，求出 unknowns 之間的關係

(別忘了這一步，可以參考講義 page 290)

4-8-3 範例

Figure 3.3.4 的例子 (See Pages 94, 95)

$$L_1 \frac{di_2(t)}{dt} + (R_1 + R_2)i_2(t) + R_1 i_3(t) = E(t)$$

$$R_1 i_2(t) + L_2 \frac{di_3(t)}{dt} + R_1 i_3(t) = E(t)$$

令 $L_1 = L_2 = 1, R_1 = 4, R_2 = 6, E(t) = 10$

$$\frac{di_2(t)}{dt} + 10i_2(t) + 4i_3(t) = 10$$

$$4i_2(t) + \frac{di_3(t)}{dt} + 4i_3(t) = 10$$

求解

Step 1

$$(D + 10)i_2 + 4i_3 = 10 \quad \dots\dots\dots (\text{式 } 1)$$

$$4i_2 + (D + 4)i_3 = 10 \quad \dots\dots\dots (\text{式 } 2)$$

Step 2-1

$$(D + 4) \times (\text{式 } 1) - 4 \times (\text{式 } 2)$$

$$(D + 4)(D + 10)i_2 - 16i_2 = (D + 4)10 - 4 \times 10$$

Note: $(D + 4)10 = \frac{d}{dt}10 + 4 \times 10 = 40$

$$(D^2 + 14D + 24)i_2 = 0$$

Step 3-1

auxiliary function: $m^2 + 14m + 24 = 0$

roots $m_1 = -2 \quad m_2 = -12$

$$i_2(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-12t}$$

Step 2-2 $4 \times (\text{式 } 1) - (D+10) \times (\text{式 } 2)$

$$16i_3 - (D+4)(D+10)i_3 = 4 \times 10 - (D+10)10$$

$$-(D^2 + 14D + 24)i_3 = -60$$

$$(D^2 + 14D + 24)i_3 = 60$$

Step 3-2 auxiliary function: $m^2 + 14m + 24 = 0$

roots $m_1 = -2$ $m_2 = -12$

complementary function for $i_{3,c}(t) = c_3 e^{-2t} + c_4 e^{-12t}$

Particular solution: $i_{3,p}(t) = A$

$$24A = 60 \quad , \quad A = 5/2$$

$$i_3(t) = c_3 e^{-2t} + c_4 e^{-12t} + 5/2$$

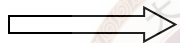
Step 4

將 $i_2(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-12t}$ 代回(式 1)
 $i_3(t) = c_3 e^{-2t} + c_4 e^{-12t} + 5/2$

$$(8c_1 + 4c_3)e^{-2t} + (-2c_2 + 4c_4)e^{-12t} + 10 = 10$$

$$8c_1 + 4c_3 = 0$$

$$-2c_2 + 4c_4 = 0$$



$$c_3 = -2c_1$$

$$c_4 = c_2 / 2$$

$$i_2(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-12t}$$

$$i_3(t) = -2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-12t} / 2 + 5/2$$

此即 $i_2(t)$ 和 $i_3(t)$ 的解

問題：需要代回另一式嗎？

將 $i_2(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-12t}$
 $i_3(t) = -2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-12t} / 2 + 5/2$ 代回(式 2)

$$(4 + 4 - 8)c_1 e^{-2t} + (4 - 6 + 2)c_2 e^{-12t} + 10 = 10$$

無論 c_1 和 c_2 的值為多少，等號皆成立

● ● 較快速的解法

Step 2-2 將 $i_2(t)$ 解出來以後

直接將 $i_2(t)$ 代回 (式1)

$$(D+10)(c_1e^{-2t} + c_2e^{-12t}) + 4i_3 = 10$$

$$-2c_1e^{-2t} + 10c_1e^{-2t} - 12c_2e^{-12t} + 10e^{-2t} + 4i_3 = 10$$

$$4i_3 = -8c_1e^{-2t} + 2c_2e^{-12t} + 10$$

$$i_3 = -2c_1e^{-2t} + c_2e^{-12t} / 2 + 5/2$$

但這種簡化的解法不是任何情形都適用

(式子當中沒有對第二個 dependent variable $i_3(t)$ 作微分時才適用)

Example on text page 169

$$Dx - 3y = 0$$

$$2x - Dy = 0$$

Example 1 (text page 170)

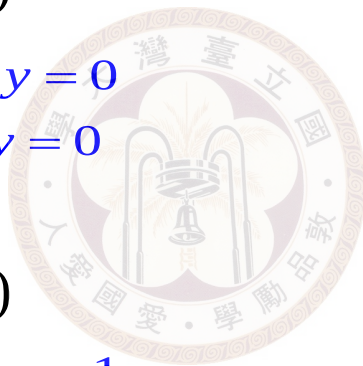
$$Dx + (D + 2)y = 0$$

$$(D - 3)x - 2y = 0$$

Example 3 (text page 172)

$$\frac{d}{dt} x_1 = -\frac{2}{25} x_1 + \frac{1}{50} x_2$$

$$\frac{d}{dt} x_2 = \frac{2}{25} x_1 - \frac{2}{25} x_2$$



Example 2 (text page 171)

$$x' - 4x + y'' = t^2$$

$$x' + x + y' = 0$$

Step 1 $(D - 4)x + D^2y = t^2$ (式1)

$(D + 1)x + Dy = 0$ (式2)

Step 2-1 (式2) $\times D -$ (式1)

$$(D^2 + 4)x = -t^2$$

Step 3-1 complementary function: $x_c = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$

particular solution: $x_p = At^2 + Bt + C$

$$4At^2 + 4Bt + 4C + 2A = -t^2 \quad A = -1/4, \quad B = 0, \quad C = 1/8$$

$$x_p = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}$$

$$x = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}$$

Step 2-2 (式1) $\times (D+1) - (\text{式2}) \times (D-4)$

$$(D^3 + 4D)y = (D+1)t^2 = t^2 + 2t$$

Step 3-2 complementary function:

$$y_c = c_3 + c_4 \cos 2t + c_5 \sin 2t$$

particular solution

$$y_p = At^3 + Bt^2 + Ct$$

注意，不可設為 $y_p = At^2 + Bt + C$

$$12At^2 + 8Bt^2 + 6A + 4C = t^2 + 2t$$

$$A = 1/12, \quad B = 1/4, \quad C = -1/8$$

$$y_p = \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t$$

$$y = c_3 + c_4 \cos 2t + c_5 \sin 2t + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t$$

Step 4 (代入式2) (因為式2比式1容易)

$$(c_1 + 2c_2 + 2c_5) \cos(2t) + (c_2 - 2c_1 - 2c_4) \sin(2t) = 0$$

$$c_5 = -c_2 - \frac{1}{2}c_1, \quad c_4 = \frac{1}{2}c_2 - c_1$$

解

$$x = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}$$

$$y = c_3 + \left(\frac{1}{2}c_2 - c_1\right) \cos 2t - \left(c_2 + \frac{1}{2}c_1\right) \sin 2t + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t$$

4-8-4 多個 Dependent Variables

Exercise 19

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= 6y & Dx - 6y &= 0 & \text{(式1)} \\ \frac{d}{dt}y &= x + z & \longrightarrow & x - Dy + z &= 0 & \text{(式2)} \\ \frac{d}{dt}z &= x + y & & x + y - Dz &= 0 & \text{(式3)} \end{aligned}$$

Steps 2, 3 : 分別簡化成只包含 x, y, z 的 DE

$$(\text{式2}) \times D + (\text{式3}) \quad (D+1)x + (1-D^2)y = 0 \quad (\text{式4})$$

$$(\text{式4}) \times 6 + (\text{式1}) \times (1-D^2)$$

$$(-D^3 + 7D + 6)x = 0$$

$$-m^3 + 7m + 6 = 0$$

$$m = 1, -2, 3$$

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t}$$

$$(\text{式4}) \times D - (\text{式1}) \times (1+D)$$

$$(-D^3 + 7D + 6)y = 0$$

$$y = c_4 e^{-t} + c_5 e^{-2t} + c_6 e^{3t}$$

$$(\text{式3}) \times 6 + (\text{式1}) \quad (D+6)x - 6Dz \quad (\text{式5})$$

$$(\text{式1}) \times D - (\text{式2}) \times 6 \quad (D^2 - 6)x - 6z = 0 \quad (\text{式6})$$

$$(\text{式5}) \times (D^2 - 6) + (\text{式6}) \times (D+6)$$

$$(6D^3 - 42D - 36)z = 0$$

$$z = c_7 e^{-t} + c_8 e^{-2t} + c_9 e^{3t}$$

Step 4 : 把 $c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9$ 用 c_1, c_2, c_3 表示

將 $x = c_1 x^{-t} + c_2 x^{-2t} + c_3 x^{3t}$ 代回 (式1)

$$y = c_4 x^{-t} + c_5 x^{-2t} + c_6 x^{3t}$$

$$6c_4 = -c_1, 6c_5 = -2c_2, 6c_6 = 3c_3$$

$$y = -\frac{1}{6} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{3t}$$

將

$$\begin{aligned}x &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} \\y &= -\frac{1}{6} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{3t} \quad \text{代回 (式2)} \\z &= c_7 e^{-t} + c_8 e^{-2t} + c_9 e^{3t}\end{aligned}$$

$$c_7 = -\frac{5}{6} c_1, c_8 = -\frac{1}{3} c_2, c_9 = \frac{1}{2} c_3$$

$$z = -\frac{5}{6} c_1 e^{-t} - \frac{1}{3} c_2 e^{-2t} + \frac{1}{2} c_3 e^{3t}$$

思考：y 和 z 有無快速解法？

Higher order 規則

(1) 假設有 N 個 dependent variables,

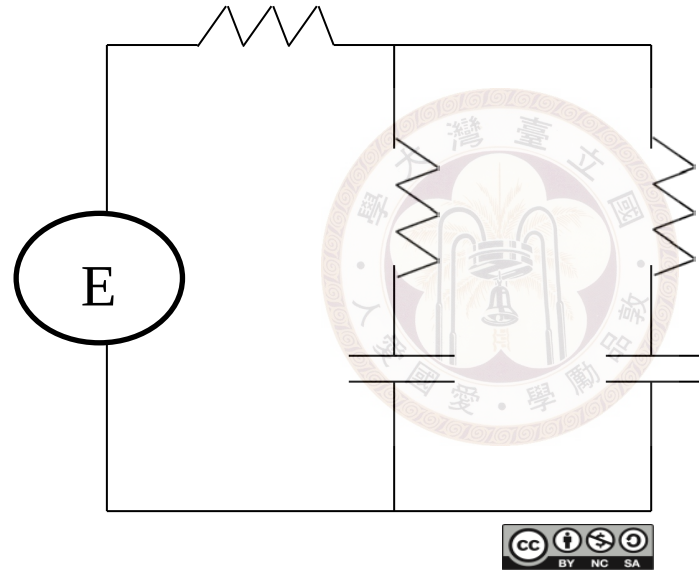
則至少需要 N 個 DE 才可以得出 solutions

(2) 若每一個 DE 的 orders 分別為 $k_1, k_2, k_3, \dots, k_N$

最後將「可能」得出 order 為 $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_N$ 的 DE

(3) 要代回其中 $N-1$ 個式，來求 unknowns 之間的關係

A circuit that can be modeled by a 2nd order polynomial.



4-8-5 本節需注意的地方

(1) Section 4.8 的方法只適用於 constant coefficients 的情形

(2) 每一個 dependent variable 的解，

homogeneous 的部分通常會有相同的型態

(3) 概念不難，但計算繁雜

(自我訓練解題速度和解題正確度是必要的)

(4) 驗算

(5) 別忘了 Step 4 計算 unknowns 之間的關係

(6) 何時可以用較快速的解法？

勘誤：課本 page 169 的中間

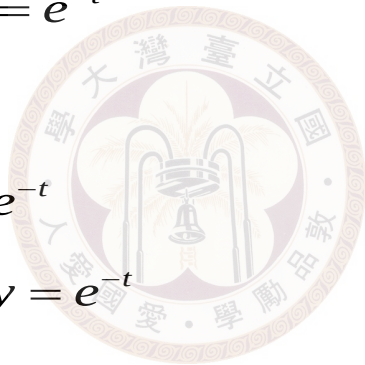
$$x' - 4x + y' - 2y = e^{-t}$$

$$(D - 4)x + (D - 2)y = e^{-t}$$

應改為

$$x' + 4x + y' - 2y = e^{-t}$$

$$(D + 4)x + (D - 2)y = e^{-t}$$



4-9 Nonlinear Differential Equations

Method 1: Reduction of Order

Method 2: Taylor Series

Method 3: Numerical Approach



4-9-1 Method 1: Reduction of Order

精神：變成 1st order DE

再用 1st order DE 的方法求解

(這方法的名字和 Section 4-2 一樣，但是不限於 linear，而且不必知道其中一個解)

限制：The DE should have the form of

Case 1, page 306

$$F\left(x, \frac{d}{dx}y, \frac{d^2}{dx^2}y\right) = 0$$

(Without the term y)

or

Case 2, page 308

$$F\left(y, \frac{d}{dx}y, \frac{d^2}{dx^2}y\right) = 0$$

(Without the term x)

Case 1: The 2nd order DE has the form of $F\left(x, \frac{d}{dx}y, \frac{d^2}{dx^2}y\right) = 0$
(Without the term y)

u $\frac{d}{dx}u$

解法： (Step 1) Set $u = \frac{d}{dx}y$

此時DE 變成 $F\left(x, u, \frac{d}{dx}u\right) = 0$ (對 u 而言，是 1st order DE)

(Step 2) 將 u 解出來 (用 Section 2 的方法)

(Step 3) 對 u 作積分，即解出 y

Example 1 (text page 174)

$$y'' = 2x(y')^2$$

(Step 1) $u = y'$

$$\frac{d}{dx}u = 2xu^2$$

(Step 2) $u = -\frac{1}{x^2 + c}$

(Step 3) $y = -\int \frac{1}{x^2 + c} dx = ?$



問題：u 要用什麼方法解？

Case 2: The 2nd order DE has the form of $F\left(y, \frac{d}{dx}y, \frac{d^2}{dx^2}y\right) = 0$
 (Without the term x)

$u \quad u \frac{d}{dy}u$

解法：(Step 1) Set $u = \frac{d}{dx}y$

$$\frac{d^2}{dx^2}y = \frac{d}{dx}u = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy}u = u \frac{d}{dy}u \quad (\text{Chain rule})$$

此時DE 變成 $F\left(y, u, u \frac{d}{dy}u\right) = 0$

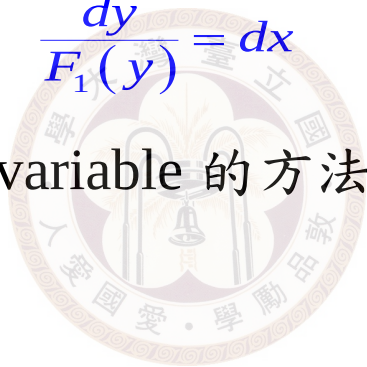
(對 u 而言，是 1st order DE, independent variable 為 y)

(Step 2) 將 u 解出來 (用 Section 2 的方法)

得出的解, u 是 y 的函數 $u = F_1(y)$

(Step 3) $\frac{dy}{dx} = F_1(y) \quad \frac{dy}{F_1(y)} = dx$

用 separable variable 的方法即可將解得出



Example 2 (text page 175)

$$yy'' = (y')^2$$

(Step 1) Set $u = \frac{d}{dx} y$

$$y \cdot u \frac{d}{dy} u = u^2$$

(Step 2) $\frac{du}{u} = \frac{dy}{y}$ $\ln|u| = \ln|y| + c_1$ $|u| = |y|e^{c_1}$

$$u = c_2 y \quad (c_2 = \pm e^{c_1})$$

(Step 3) $\frac{dy}{dx} = c_2 y$ $\frac{dy}{y} = c_2 dx$ $\ln|y| = c_2 x + c_3$ $|y| = e^{c_2 x} e^{c_3}$

$$y = c_4 e^{c_2 x} \quad (c_4 = \pm e^{c_3})$$

4-9-2 Method 2: Taylor Series

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots$$

更一般化的型態

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{y^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4 + \dots$$

Step 1 算出 $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$, $y^{(4)}(x_0)$, $\dots$

Step 2 代回 Taylor series

Example 3 (text page 176)

$$y'' = x + y - y^2 \qquad y(0) = -1 \qquad y'(0) = 1$$

$$y'' = x + y - y^2 \qquad y''(0) = 0 + (-1) - 1^2 = -2$$

$$y''' = \frac{d}{dx}(x + y - y^2) = 1 + y' - 2y'y \qquad y'''(0) = 4$$

$$y^{(4)} = \frac{d}{dx}(1 + y' - 2y'y) = y'' - 2y''y - 2(y')^2 \qquad y^{(4)}(0) = -8$$

$$y^{(5)} = \frac{d}{dx}(y'' - 2y''y - 2(y')^2) = y''' - 2y'''y - 6y'y'' \qquad y^{(5)}(0) = 24$$

:

代回 Taylor series

$$y(x) = -1 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \dots\dots$$

限制：(1) $y(x)$ 在 x_0 的地方必需為 analytic,

($x = x_0$ 不為 singular point)

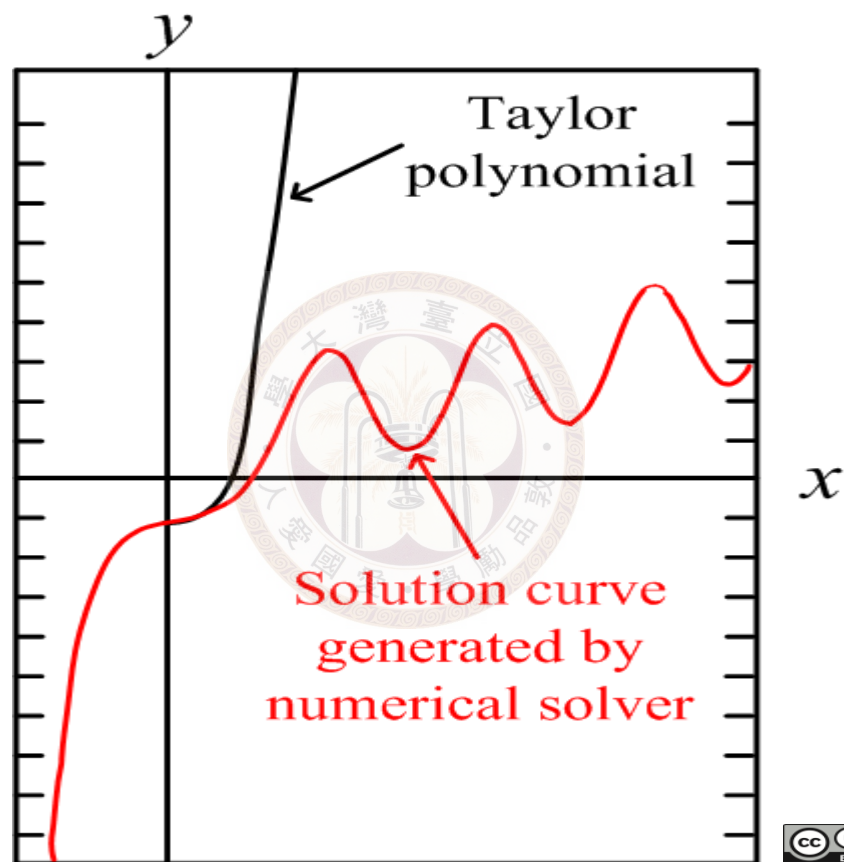
(2) 在解 n^{th} order DE 時， $y(x_0)$ ， $y'(x_0)$ ， $y''(x_0)$ ，.....

$y^{(n-1)}(x_0)$ 的值必需皆為已知

(3) 得出的解只有在 x_0 附近較為正確

問題：(1) Taylor series 應該取多少項？

(2) $|x - x_0|$ 的範圍？



4-9-3 Method 3: Numerical Method

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') \quad y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = u_0$$

解法 $\begin{cases} y' = u \\ u' = f(x, y, u) \end{cases}$ subject to $y(x_0) = y_0, \quad u(x_0) = u_0$

使用Section 2-6 的 Euler's Method

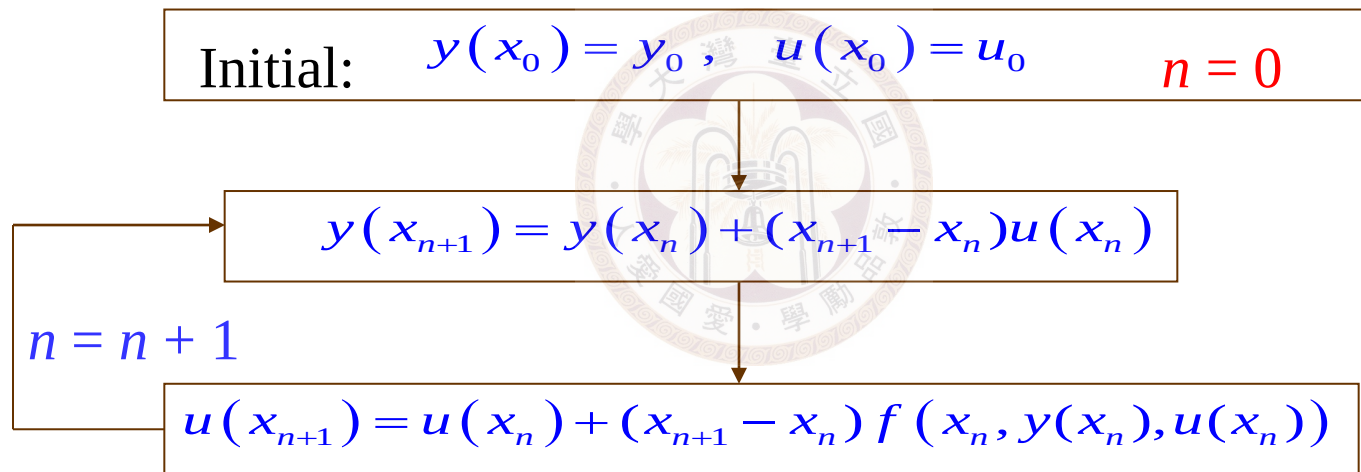
$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + (x_{n+1} - x_n)y'(x_n)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + (x_{n+1} - x_n)u(x_n)$$

$$\begin{aligned} u(x_{n+1}) &= u(x_n) + (x_{n+1} - x_n)u'(x_n) \\ &= u(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f(x_n, y(x_n), u(x_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = f(x, y, u) \end{cases} \quad y(x_0) = y_0, \quad u(x_0) = u_0$$

Recursive 的解法



更一般化的情形

$$\frac{d^k y}{dx^k} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)})$$

$$y(x_0) = y_{0,0} \quad y'(x_0) = y_{0,1} \quad y''(x_0) = y_{0,2} \quad \dots$$

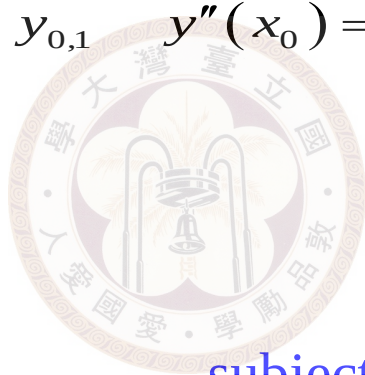
$$y^{(k-1)}(x_0) = y_{0,k-1}$$

改變為

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = u_1 \\ u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ \vdots \\ u_{k-2}' = u_{k-1} \\ u_{k-1}' = f(x, y, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) \end{array} \right.$$

subject to

$$\begin{array}{l} y(x_0) = y_{0,0} \\ u_1(x_0) = y_{0,1} \\ u_2(x_0) = y_{0,2} \\ \vdots \\ u_{k-1}(x_0) = y_{0,k-1} \end{array}$$



Recursive 的解法

Initial: $y(x_0) = y_{0,0}$, $u_1(x_0) = y_{0,1}$, $u_2(x_0) = y_{0,2}$,
 $\dots\dots, u_{k-1}(x_0) = y_{0,k-1}$, $n = 0$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + (x_{n+1} - x_n)u_1(x_n)$$

$$u_1(x_{n+1}) = u_1(x_n) + (x_{n+1} - x_n)u_2(x_n)$$

$$u_2(x_{n+1}) = u_2(x_n) + (x_{n+1} - x_n)u_3(x_n)$$

$$u_{k-2}(x_{n+1}) = u_{k-2}(x_n) + (x_{n+1} - x_n)u_{k-1}(x_n)$$

$$u_{k-1}(x_{n+1}) = u_{k-1}(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f(x_n, y(x_n), u_1(x_n), u_2(x_n), \dots\dots, u_{k-1}(x_n))$$

$n = n + 1$

解法的限制：

$$\frac{d^k y}{dx^k} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)})$$

(1) 當 $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)})$ 為無窮大 (例如 singular point)

或者 $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)})$ 雖然不是無窮大，但是值相當大

用以上的方法會產生問題

(2) 必需有 k 個在同一點的 initial conditions

4-9-4 本節需注意的地方

(1) Section 4.9 的方法並非任何情形都可以解

每一種方法都有一些限制

(2) Section 4.1 的定理不適用於本節 (例如 exercises 4.9 的第 1, 2 題)

(3) Method 1 比較有挑戰性，要多加變通

(4) Method 1 別忘了將 u 用 dy/dx 代回

5-3 Nonlinear Models

非線性彈簧的例子 (text pages 207, 208)

鍾擺的例子 (text pages 209, 210)

電話線的例子 (text pages 210, 211)

火箭的例子 (text pages 211)

拿鏈子的例子 (text pages 211, 212, 213)



5-3-1 火箭的例子

$$F = ma \quad F = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

F 會隨著 y 而改變 (萬有引力定律)

$$-k \frac{mM}{y^2(t)} = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

萬有引力

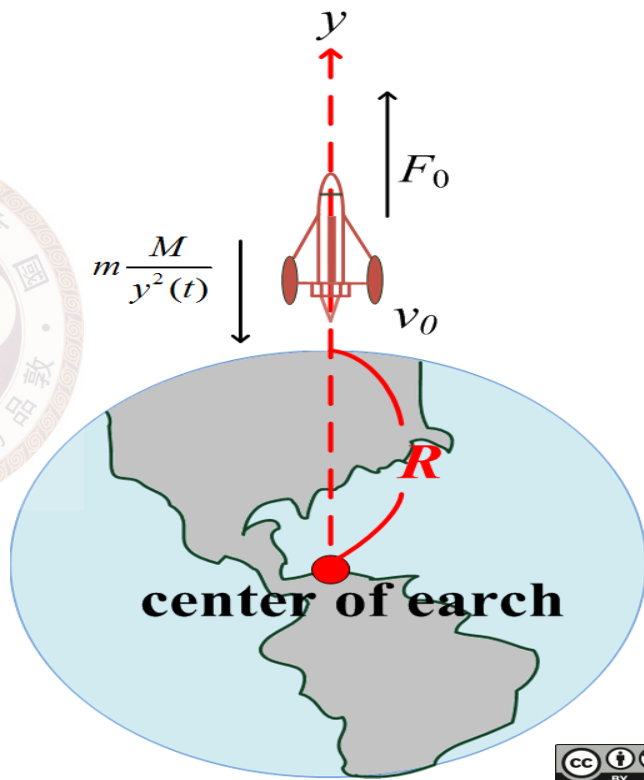
M : 地球的質量

m : 火箭的質量

• 修正：

$$\frac{F_0}{m} - k \frac{mM}{y^2(t)} = m \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

推進力

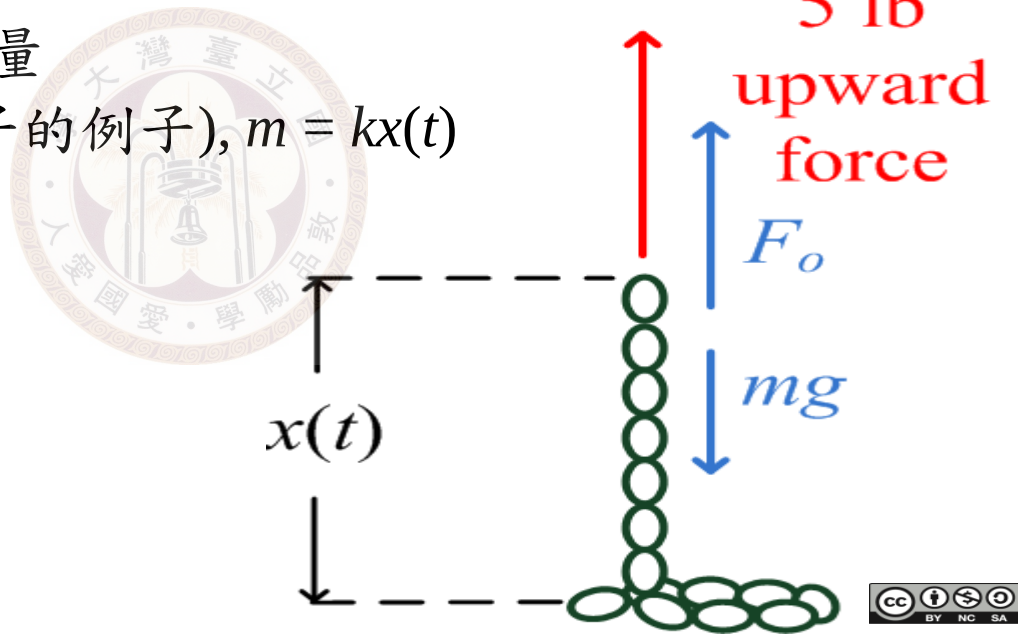


5-3-2 拿鏈子的例子

$$F = \frac{d}{dt}mv$$

m : 質量, v : 速度, mv : 動量

m 會隨著 x 而改變 (拿鏈子的例子), $m = kx(t)$



$$F_0 - mg = v \frac{d}{dt} m + m \frac{d}{dt} v, \quad (F = F_0 - mg)$$

$$F_0 - kg \ x(t) = \left(\frac{d}{dt} x(t) \right) \frac{d}{dt} kx(t) + kx(t) \frac{d^2}{dt^2} x(t),$$

$$kx(t) \frac{d^2}{dt^2} x(t) + k \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + kg \ x(t) = F_0$$

F_0 : 施力, k : 每單位長的質量, $x(t)$ 高度 (如前頁)

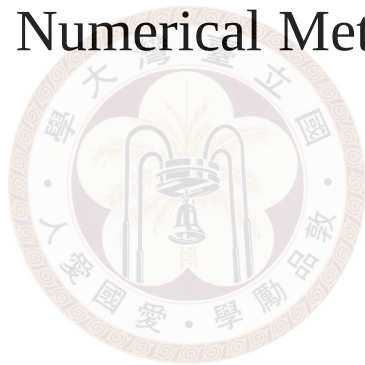
Example 4 (text page 212)

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + 32x = 160$$



(1) Cauchy-Euler equation 缺乏應用

(2) 許多情形還是只能用 Numerical Method 來解



5-3-3 本節需注意的地方

(1) 大部分的情形，用到的 DE 都還算很簡單

但是練習將物理問題變成 DE 的問題。

(2) 正負號 (和方向有關) 易出錯

(3) $\tan \theta =$ 斜率

(4) 儘可能用比較簡單的方法來計算一個問題

Reviews for Higher Order DE:

(A) Linear DE Complementary Function 3 大解法

(1) Reduction of Order (Section 4-2)

適用情形：

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$$

(2) Auxiliary Function (Section 4-3)

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y = 0$$

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0$$

適用情形：

4 Cases (See pages 179, 180)

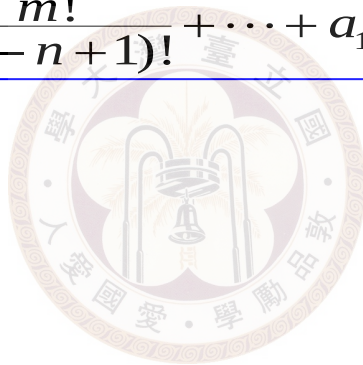
(3) Cauchy-Euler Equation (Section 4-7)

$$a_n x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 x y'(x) + a_0 y = 0$$



$$a_n \frac{m!}{(m-n)!} + a_{n-1} \frac{m!}{(m-n+1)!} + \cdots + a_1 x \frac{m!}{(m-1)!} + a_0 = 0$$

適用情形：



(B) Linear DE Particular solution 3 大解法

(1) Guess (Section 4-4) (熟悉講義 page 191 的表)

要訣： y_p should be a linear combination of $g(x)$, $g'(x)$,

適用情形： $g''(x)$, $g'''(x)$, $g^{(4)}(x)$, $g^{(5)}(x)$,

遇到重覆，乘 x 或 $\ln x$

(2) Annihilator (Section 4-5)

若原本的 DE 為 $L[y(x)] = g(x)$ Annihilator: $L_1[g(x)] = 0$
Particular solution 為 $L_1\{L[y(x)]\} = 0$ 的解

(扣去和 $L[y(x)] = 0$ 的解重複的部分)

適用情形：

$$y = y_c + y_p$$

Annihilator 算法三大規則： Pages 210-212

(3) Variation of parameters (Section 4-6)

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 + \cdots + u_n y_n$$

$$u'_k(x) = \frac{W_k}{W} \quad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & \cdots & y'_n \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 & \cdots & y''_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

W_k : replace the k^{th} column of W by

適用情形：

$$f(x) = \frac{g(x)}{a_n(x)} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

(4) For Cauchy-Euler Equation (Section 4-7)

可採用二種方法

(1) 先用

$$a_n \frac{m!}{(m-n)!} + a_{n-1} \frac{m!}{(m-n+1)!} + \cdots + a_1 x \frac{m!}{(m-1)!} + a_0 = 0$$

解 complementary function

再用 Variation of parameters 解 particular solution

(2) Use the method on pages 253, 254

Set $x = e^t$, $t = \ln x$

(C) Combination of Linear DEs (Section 4-8)

方法：

Step 1: 將 $\frac{d^n}{dt^n}$ 變成 D^n

Steps 2, 3: 用代數消去法，變成只含有一個 dependent variable 的 DE，再將這個 dependent variable 解出來

Step 4: 代回原式，求各 dependent variable 的常數 c_k 之間的關係

適用情形：

(D) Nonlinear DE 的3大解法 (Section 4-9)

(1) Reduction of Order

$$(1-1) \quad F\left(x, \frac{d}{dx}y, \frac{d^2}{dx^2}y\right) = 0 \longrightarrow F\left(x, u, \frac{d}{dx}u\right) = 0$$

Set $u = \frac{d}{dx}y$

$$(1-2) \quad F\left(y, \frac{d}{dx}y, \frac{d^2}{dx^2}y\right) = 0 \longrightarrow F\left(y, u, u \frac{d}{dy}u\right) = 0$$

Set $u = \frac{d}{dx}y$

(2) Taylor Series

適用情形： $y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \neq \infty$$

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \\ + \frac{y^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + \dots$$

(3) Numerical Method

適用情形： $y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \neq \infty$$

Exercises for practicing

Section 4-8 5, 10, 14, 17, 18, 20, 22, 23

Section 4-9 1, 5, 6, 8, 11, 12, 15, 18, 19

Review 4 33, 34, 38, 40

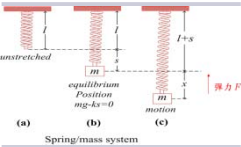
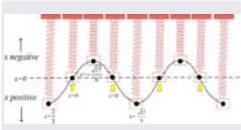
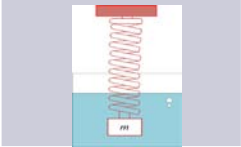
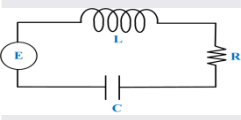
Section 5-1 11, 25, 40, 45

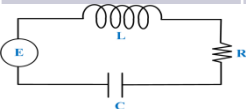
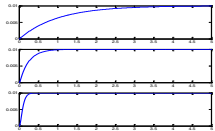
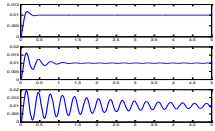
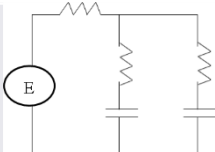
Section 5-2 5, 22

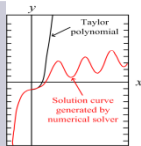
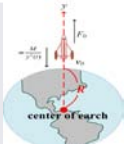
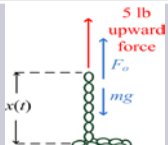
Section 5-3 14, 16

Review 5 21, 22



頁碼	作品	版權圖示	來源/作者
261			台灣大學 電信工程研究所 丁建均教授 以創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣3.0版授權釋出。
262			台灣大學 電信工程研究所 丁建均教授 以創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣3.0版授權釋出
263			台灣大學 電信工程研究所 丁建均教授 以創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣3.0版授權釋出
268			台灣大學 電信工程研究所 丁建均教授 以創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣3.0版授權釋出

頁碼	作品	版權圖示	來源/作者
275			台灣大學 電信工程研究所 丁建均教授 以創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣3.0版授權釋出。
277			台灣大學 電信工程研究所 丁建均教授 以創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣3.0版授權釋出
278			台灣大學 電信工程研究所 丁建均教授 以創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣3.0版授權釋出
301			台灣大學 電信工程研究所 丁建均教授 以創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣3.0版授權釋出

頁碼	作品	版權圖示	來源/作者
314			台灣大學 電信工程研究所 丁建均教授 以創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣3.0版授權釋出。
322			台灣大學 電信工程研究所 丁建均教授 以創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣3.0版授權釋出
323			台灣大學 電信工程研究所 丁建均教授 以創用CC「姓名標示－非商業性－相同方式分享」臺灣3.0版授權釋出